Semana 2

- En la segunda semana se sugiere resolver los ejercicios 10 a 19 de la Guía 1.
- Se sugiere antes de resolver los ejercicios ver los videos de YouTube de los temas coorrespondientes así como también leer la bibliografía recomendada y el material teórico subido en el campus del curso.
- A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y algunas observaciones para resolver los ejercicios correspondientes a la semana 2. Los ejercicios propuestos que no están en la guía (pero que se relacionan con los mismos) no tienen numeración.

Conjuntos linealmente independientes

Antes de hacer ejercicios de independencia lineal, recordemos su definición:

Definición. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$ es linealmente independiente (de ahora en más abreviamos LI) si dados $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r = 0_{\mathbb{V}}$$

entonces $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$.

Recordar que $0_{\mathbb{V}}$ denota el elemento neutro del $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Ejercicio 1.10: Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son LI en su correspondiente espacio vectorial.

a) El subconjunto $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \}$.

Dem. Vamos a resolver el problema de dos maneras.

Por definición: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Operando, nos queda el siguiente sistema a resolver,
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Resolviendo el sistema, obtenemos que $a = b = c = 0$.
Entonces el conjunto es LI.

Triangulando la matriz que resulta de colocar los vectores en fila:

Recordemos que cuando triangulamos una matriz, podemos realizar las siguientes operaciones entre las filas:

i) intercambiar filas,

ii) multiplicar una fila por un escalar no nulo,

iii) reemplazar una fila por esa fila sumada a un multiplo de otra.

Llamemos $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$, coloquemos dichos vectores en las filas de una matriz y triangulemos.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -6 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \underset{v_2 - 3v_1 \to v_2'}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} \underset{v_3 - \frac{5}{4}v_2' \to v_3'}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

En la Observación 1 (cuyo enunciado y demostración se encuentra al final de este archivo), se demuestra que las operaciones que realizamos entre los vectores (colocados en las filas de una matriz) cuando triangulamos dicha matriz no modifican su independencia lineal. Es decir, si llamamos $v_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_3' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$, entonces claramente $\{v_1', v_2', v_3'\}$ es un conjunto LI. Equivalentemente, por la Observacioń 1 (ver su demostración al final de este archivo), el conjunto original $\{v_1, v_2, v_3\}$ era LI.

La utilidad de este "método" es que si al triangular la matriz, una fila hubiera dado nula, entonces el vector que originalmente estaba en dicha fila es LD con el resto de los vectores. La desventaja de este método es que (obviamente) sólo se puede aplicar a una cantidad finita de vectores de $\mathbb{C}^n$ (con la suma y el producto por escalares usuales de $\mathbb{C}^n$). $\square$

Ejercicio 1.11: Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes subconjuntos son linealmente dependientes (LD) en su correspondiente espacio vectorial.

a) El subconjunto $\{1 + ax + 3x^2, 4 + 5x + 7x^2, a + x + x^2\}$ en $\mathbb{R}_2[x]$.

Dem. Para este ejercicio no podemos usar la Observación 1 (no tenemos vectores de $\mathbb{C}^n$ sino polinomios) así que lo haremos por definición. Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1 + ax + 3x^2) + \beta(4 + 5x + 7x^2) + \gamma(a + x + x^2) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Buscaremos para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, obtenemos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$; para esos valores de a el conjunto será LI, o equivalentemente, cuando a NO adquiera eso valores el conjunto será LD.

Operando y sacando factor común $1, x, x^2$ en la ecuación anterior, tenemos que:

$$1(\alpha + 4\beta + a\gamma) + x(a\alpha + 5\beta + \gamma) + x^2(3\alpha + 7\beta + \gamma) = 0 = \mathbf{0}(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

donde $\mathbf{0}$ denota al polinomio nulo (es decir al elemento neutro de $\mathbb{R}_2[x]$). Como sabemos que el conjunto $\{1, x, x^2\}$ es LI en $\mathbb{R}_2[x]$ y tenemos una CL de dichos vectores igualada al elemento neutro de $\mathbb{R}_2[x]$ vale que $\alpha + 4\beta + a\gamma = a\alpha + 5\beta + \gamma = 3\alpha + 7\beta + \gamma = 0$. Escrito de manera matricial, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como tenemos una matriz cuadrada de 3×3, sabemos que el determinante de dicha matriz es no nulo si y sólo si la solución del sistema anterior es la trivial ($\alpha = \beta = \gamma = 0$) si y sólo si el subconjunto de vectores iniciales es LI. Equivalentemente, el determinante de la matriz en cuestión es nulo si y sólo si la solución del sistema es no trivial si y sólo si el subconjunto de vectores iniciales es LD. Calculemos el determinante:
$\det(\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}) = 7a^2 - 19a + 10$. Entonces $7a^2 - 19a + 10 = 0$ si y sólo si $a = \frac{5}{7}$ ó $a = 2$. Para eso valores de a el subconjunto $\{1 + ax + 3x^2, 4 + 5x + 7x^2, a + x + x^2\}$ es LD o equivalentemente si $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{7}, 2\}$ el subconjunto $\{1 + ax + 3x^2, 4 + 5x + 7x^2, a + x + x^2\}$ es LI.

Observar que podemos usar este "método" del determinante cuando el sistema a resolver tiene la misma cantidad de incógnitas que de ecuaciones (es decir nos quedan matrices cuadradas). Si ese no es el caso, el determinante no está definido y hay buscar otras maneras de resolver el problema. Por ejemplo, triangulando la matriz que nos quedó y viendo para que valores de a una (o más) filas se anulan. $\square$

Ejercicio 1.12: Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-ev, $\{v_1, v_2, \cdots, v_2\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto LI, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Mostrar que $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ es LI si y sólo si $det(A) \neq 0$.

Dem. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = 0_{\mathbb{V}}. \tag{1}$$

Entonces el conjunto $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ es LI si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Para demostrar esto, veamos qué pinta tiene la expresión (1) desarrollándola:

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \cdots + \alpha_n w_n = \alpha_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n) +$$
$$\alpha_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots a_{n2}v_n) + \cdots + \alpha_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots a_{nn}v_n) = 0_{\mathbb{V}}.$$

Si sacamos factor común los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ en la expresión de arriba, entonces:

$$v_1(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n}) + v_2(\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n}) + \cdots +$$
$$v_n(\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nn}) = 0_{\mathbb{V}}.$$

Como el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es LI (por hipótesis) y arriba tenemos una CL de dichos vectores igualada a $0_{\mathbb{V}}$ tenemos que cada escalar que multiplica a dichos vectores es nulo, es decir:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n} = 0 \\ \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n} = 0 \\ \cdots \\ \alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \cdots + \alpha_n a_{nn} = 0. \end{cases}$$

Como $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$, este sistema de ecuaciones es equivalente a

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0. \tag{2}$$

Por lo tanto $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ es LI si y sólo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, si y sólo si la única solución del sistema (2) es la trivial, si y sólo si A es inversible (acá usamos que A es cuadrada), si y sólo si $det(A) \neq 0$. □

Ejercicio 1.14: Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de funciones son L.I

b) $\mathcal{G} = \{1 + 3\sin(x) - 2\cos(x), 3 + 5\sin(x) - 6\cos(x), -5\sin(x) + 6\cos(x)\}$.

Recordemos que, dadas $f, g : I \to \mathbb{R}$ (es decir dos funciones definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ que toman valores en $\mathbb{R}$). Entonces

$$f = g \text{ si y sólo si } f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in I.$$

Repasemos lo que nos dice el Teorema del Wronskiano (leer los detalles y demostración (por ejemplo) en el apunte de Mansilla):

Teorema 1. *Sean $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ un conjunto de funciones pertenecientes a $C^{n-1}(I)$ (es decir funciones con $n-1$ derivadas continuas) tal que existe $x_0 \in I$ tal que $W(f_1, \cdots, f_n)(x_0) \neq 0$. Entonces el conjunto $\{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ es LI.*

Observar que el teorema NO es un "si y sólo si". Es un teorema del tipo "si p entonces q". Es decir, con ese teorema podemos decir que si el conjunto de funciones es LD, entonces el Wronskiano se anula en todo punto ("no q entonces no p"). El Teorema NO me dice qué pasa si el Wronskiano se anula en todo punto. De hecho, el ejercicio 1.16 es un ejemplo de un conjunto LI cuyo Wronskiano se anula en todo punto.

Ahora sí, tratemos de resolver el ejercicio:

Dem. Vamos a resolverlo de dos maneras. Usando el teorema anterior y por definición.

Para eso llamemos, $f(x) = 1 + 3\sin(x) - 2\cos(x)$, $g(x) = 3 + 5\sin(x) - 6\cos(x)$, $h(x) = -5\sin(x) + 6\cos(x)$.

Usando el Teorema anterior:

Claramente $f, g, h \in C^2(\mathbb{R})$ (de hecho son infinitamente derivables con derivadas continuas). Calculamos el Wronskiano.

$$W(f,g,h)(x) = det \begin{bmatrix} 1+3\sin(x)-2\cos(x) & 3+5\sin(x)-6\cos(x) & -5\sin(x)+6\cos(x) \\ 3\cos(x)+2\sin(x) & 5\cos(x)+6\sin(x) & -5\cos(x)-6\sin(x) \\ -3\sin(x)+2\cos(x) & -5\sin(x)+6\cos(x) & 5\sin(x)-6\cos(x) \end{bmatrix}.$$

Ahora deberíamos calcular el determinante de esa matriz de 3×3. Recordar que el teorema que vimos nos dice que basta con encontrar un punto donde el Wronskiano no se anule para probar que el conjunto es LI. Entonces podemos hacer eso, es decir, proponemos un valor (conveniente) y vemos qué pasa con el Wronskiano en ese valor. De esa manera, nos ahorramos de calcular el Wronskiano de manera general para todo x. Por ejemplo, podemos tomar $x = 0$. Entonces,

$$W(f,g,h)(0) = det \begin{bmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -6 \end{bmatrix} = 24 \neq 0.$$

Como encontramos un punto (en este caso $x = 0$) donde W no se anula, por el teorema de arriba, concluimos que el conjunto es LI.

Por definición: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$af + bg + ch = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Veamos que $a = b = c = 0$. Observar que en la ecuación anterior $\mathbf{0}$ representa a la función nula, es decir la función tal que $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. En la Semana 1 vimos que $\mathbf{0}$ es el elemento neutro del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $C(\mathbb{R})$ (de manera similar se puede probar que $\mathbf{0}$ es el elemento de neutro de $C^n(\mathbb{R})$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$). Observar que en (3) tenemos una igualdad de funciones. Entonces, usando lo que vimos arriba para igualdad de funciones, tenemos que vale que:

$$af(x) + bg(x) + ch(x) = \mathbf{0}(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Donde ahora el 0 obviamente es el número real 0. Escribiendo la expresión de las funciones, nos queda:

$$a(1+3\sin(x)-2\cos(x)) + b(3+5\sin(x)-6\cos(x)) + c(-5\sin(x)+6\cos(x)) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Usando esa expresión, tenemos que probar que $a = b = c = 0$. Como la ecuación anterior vale para todo x, podemos proponer 3 valores de x. De esa manera, nos quedará un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, resolvemos el sistema y vemos si su solución es la trivial.

Por ejemplo, si proponemos $x = 0$, nos queda: $-a - 3b + 6c = 0$. Si proponemos, $x = \frac{\pi}{2}$, nos queda $4a + 8b - 5c = 0$. Por último, si proponemos $x = -\frac{\pi}{2}$, nos queda $-2a - 2b + 5c = 0$.

Es decir, nos queda el sistema: $\begin{cases} -a - 3b + 6c = 0 \\ 4a + 8b - 5c = 0 \\ -2a - 2b + 5c = 0 \end{cases}$

Resolviendo, nos queda que $a = b = c = 0$, es decir la única solución es la trivial. Por lo tanto el conjunto $\{f, g, h\}$ es LI.

Ejercicio Pensar qué hubiera pasado, si con los 3 valores de x que propusimos, el sistema de ecuaciones que obteníamos hubiera dado indeterminado. Pregunta: Se puede concluir entonces que el sistema es LD? Spoiler alert: NO. Tratar de meditar esto; resolver el ejercicio 1.16 puede ayudar a entender mejor esta pregunta.

$\square$

Ejercicio 1.15: Observar que los siguientes conjuntos de funciones están contenidos en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{R})$ y comprobar que son linealmente independientes.

c) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}\}$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ son n números reales distintos dos a dos.

Primero entendamos la pista que nos dan. Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ como $\lambda_i - \lambda_n < 0$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ vale que

$$\lim_{x\to\infty} e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0,$$

para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$. Este es un resultado de Análisis I. Si no están convencidos, vuelvan a repasar eso.

Más aún (esto prueba un poco más que la pista que nos dan en el problema), si $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, usando las propiedades de límite (de sucesiones convergentes) también vale que

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0.$$

Dem. Claramente $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}\} \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$, ya que todas las funciones del conjunto en cuestión son infinitamente derivables con derivadas continuas.

A continuación vamos a probar que el conjunto dado es LI por inducción en i.

Si $i = 1$, el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}\}$ es LI, porque tiene un sólo elemento (que no es la función nula).

Si $i = 2$ (no es necesario probar este caso pero lo vamos a hacer para fijar ideas) el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ también es LI. Supongamos que no, es decir supongamos que dicho conjunto es LD. Entonces existe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^{\lambda_2 x} = a_1 e^{\lambda_1 x} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente, como $e^{\lambda_2 x} > 0$ para todo x (es decir nunca se anula), tenemos que

$$1 = a_1 \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = a_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, tomando límite a ambos lados de la igualdad anterior, tenemos que

$$1 = \lim_{x\to\infty} 1 = \lim_{x\to\infty} a_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0,$$

donde usamos la sugerencia del problema. Por lo tanto llegamos a un absurdo y el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ no puede ser LD. Entonces es LI.

Hipótesis inductiva (HI): para $i = n-1$, el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-1} x}\}$ es LI.

Con la HI, vamos a probar que para $i = n$ el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-1} x}, e^{\lambda_n x}\}$ también es LI. Supongamos que no, es decir que dicho conjunto es LD. Entonces, por hipótesis inductiva, no queda otra que $e^{\lambda_n x}$ sea una CL de los elementos de $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-1} x}\}$ (antes de continuar, pensar por qué pasa esto). Es decir, existen $a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, tales que

$$e^{\lambda_n x} = a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}.$$

Operando de la misma manera que para el caso $i = 2$, tenemos que

$$1 = \frac{a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + a_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x}}{e^{\lambda_n x}} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ahora, tomando límite a ambos lados de la igualdad anterior (como en el caso $i = 2$), tenemos que

$$1 = \lim_{x \to \infty} 1 = \lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i e^{(\lambda_i - \lambda_n)x} = 0,$$

donde usamos la sugerencia del problema. Por lo tanto llegamos a un absurdo y el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \cdots, e^{\lambda_{n-1} x}, e^{\lambda_n x}\}$ no es LD. Por lo tanto es LI y probamos lo que queríamos.

$\square$

Bases de espacios vectoriales

Repasemos la definición de *base*:

Definición. *Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{V}$ un subespacio. El conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es una base de $\mathcal{S}$ si*

i) $v_1, v_2, \cdots, v_r \in \mathcal{S}$,

ii) $\mathcal{S} = gen\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$,

iii) el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ *es LI.*

En este caso, se define la dimensión de $\mathcal{S}$ como $\dim(\mathcal{S}) = |\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}| = r$ *(es decir el cardinal del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$).*

Ejercicio 1.17: Hallar una base y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

e) $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}[x] : p^{(n)} = 0\}$.

Dem. Primero entendamos qué elementos de $\mathbb{R}[x]$ viven en $\mathcal{S}$. Observar que $p \in \mathbb{R}[x]$ pertenece a $\mathcal{S}$ si y sólo si $p^{(n)} = 0$. Donde $p^{(n)}$ denota la derivada n-ésima de p y 0 denota al polinomio nulo, es decir el polinomio que vale 0 en todo punto (en otros ejercicios lo hemos notado como $\mathbf{0}$). Como verán, tenemos en realidad una igualdad de polinomios (de funciones), es decir, $p \in \mathcal{S}$ si y sólo si $p^{(n)}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, donde ahora 0 denota al número real 0.

Paréntesis para ver si se entendió lo de arriba

Es crucial entender cuándo el 0 denota una función y cuando denota un número real dado que la notación del ejercicio no diferencia entre ambos casos, pero por contexto lo podemos inferir. Es decir como $p^{(n)}$ es un polinomio, no tendría sentido la igualdad $p^{(n)} = 0$ con 0 un número real, porque un polinomio y un número no se comparan. En cambio, como $p^{(n)}(x)$ es un número real (es decir al evaluar un polinomio en un punto x obtenemos un número real) en la igualdad $p^{(n)}(x) = 0$, el símbolo 0 denota al número real 0.

Fin del paréntesis

En conclusión, $\mathcal{S}$ contiene a todos los polinomios de grado menor o igual a $n-1$ y al polinomio nulo (que técnicamente no tiene grado). Esto es así porque si el grado de p es $n-1$ (o menor), su derivada n-ésima es nula en todo x; por el contrario, si el grado de p es n o mayor, su derivada n-ésima no se anula. Conclusión

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}_{n-1}[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] : grado(p) \leq n-1\} \cup \{0\}.$$

Una base de $\mathcal{S}$ podría ser $B_{\mathcal{S}} = \{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$ y $\dim(\mathcal{S}) = n$. □

Ejercicio de examen Consideremos $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ con cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sean $v_1, v_2, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$ (m vectores con todas sus componentes reales). Demostrar que el conjunto $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ no puede ser base de $\mathbb{V}$.

Hay muchas maneras de demostrar este ejercicio. Propongo que piensen otras formas alternativas.

Dem. Lo voy a probar por el absurdo. Supongamos que B es una base de $\mathbb{V}$. Entonces, dado $v \in \mathbb{C}^n$, existen $a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ tales que

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m.$$

Entonces $v \in \mathbb{R}^n$ puesto que es la combinación lineal real de m vectores de $\mathbb{R}^n$. Como v era cualquiera concluimos entonces que $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ (básicamente porque cualquier vector v de $\mathbb{C}^n$ pertenece también a $\mathbb{R}^n$). Eso claramente es absurdo, por ejemplo el vector $v = [i \ 0 \ \cdots \ 0]^T \in \mathbb{C}^n$ pero $v \notin \mathbb{R}^n$ (la primera componente es no real). El absurdo se produjo por creer que B es una base de $\mathbb{V}$. Por lo tanto B no puede ser base de $\mathbb{V}$. □

Igualdad de subespacios

Repaso de notación: Sean A, B dos conjuntos, diremos que:

$$A \subseteq B, \text{ si para cada } x \in A \text{ vale que } x \in B.$$

$$A \subsetneq B, \text{ si para cada } x \in A \text{ vale que } x \in B \text{ y existe } z \in B \text{ tal que } z \notin A.$$

$$A = B, \text{ si } A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Si tenemos que los conjuntos $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ son además subespacios de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, vale la siguiente propiedad que usaremos ampliamente:

Teorema 2. *Sea* $\mathbb{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial,* $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{V}$ *dos subespacios. Entonces* $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ *si y sólo si* $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ *y* $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{T})$.

Dem. Una de las implicaciones es obvia. Porque si $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ entonces claramente $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ y $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{T})$.

Recíprocamente, si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ y $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{T})$. Veamos que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. Lo vamos a probar por el absurdo. Supongamos que $\mathcal{S} \neq \mathcal{T}$, esto significa que $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{T}$ (si no son iguales, como por hipótesis $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ no queda otra que $\mathcal{S}$ esté totalmente contenido en $\mathcal{T}$). Es decir, existe un vector $z \in \mathcal{T}$ pero $z \notin \mathcal{S}$. Supongamos que $\dim(\mathcal{S}) = r$ y sea $\{s_1, \cdots, s_r\}$ una base de $\mathcal{S}$. Entonces el conjunto $\{s_1, \cdots, s_r, z\}$ es LI (eso es porque $z \notin \mathcal{S}$, meditar por qué pasa eso) y además $\{s_1, \cdots, s_r, z\} \subseteq \mathcal{T}$ puesto que $s_1, \cdots, s_r \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces $\mathcal{T}$ contiene al menos $r + 1$ vectores LI, por lo tanto $\dim(\mathcal{T}) \geq r + 1$, pero $\dim(\mathcal{T}) = \dim(\mathcal{S}) = r$, lo cual es absurdo ($r$ no es mayor o igual que $r + 1$). Por lo tanto $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $\square$

Ejercicio de examen Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}-$espacio vectorial tal que $\dim(\mathbb{V}) = n$. Demostrar que:

i) n vectores LI de $\mathbb{V}$ forman una base de $\mathbb{V}$.

ii) n vectores que generan $\mathbb{V}$ forman una base de $\mathbb{V}$.

Dem. Probemos el item *i*). El otro hacerlo de ejercicio.

Sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ algún conjunto de n vectores de $\mathbb{V}$ linealmente independientes y supongamos que NO son una base de $\mathbb{V}$. Entonces $gen\{v_1, \cdots, v_n\} \neq \mathbb{V}$ es decir los n vectores no generan $\mathbb{V}$. Entonces existe $v \in \mathbb{V}$ tal que $v \notin gen\{v_1, \cdots, v_n\}$. Entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n, v\}$ es LI. Como $\mathbb{V}$ contiene un conjunto LI de $n + 1$ elementos, $\dim(\mathbb{V}) \geq n + 1$. Lo cual es absurdo, pues $\dim(\mathbb{V}) = n$. Entonces el conjunto es una base de $\mathbb{V}$. $\square$

Ejercicio de examen Sean $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$ y $\mathcal{T} = gen\{x^2 + mx + 1, x^3 + x^2 - 5x + (5 + m), -x^3 + (m + 3)x^2 + x - 1\}$. Hallar $m \in \mathbb{R}$ (si existe) tal que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Dem. Como $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son subespacios, podemos usar el resultado anterior y probar para qué valores de m se cumple que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ y $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{T})$. Si pasa eso, entonces por el resultado anterior, $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Llamemos $p(x) = x^2 + mx + 1,\ q(x) = x^3 + x^2 - 5x + (5 + m),\ r(x) = -x^3 + (m + 3)x^2 + x - 1$. Entonces $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ si y sólo si $p, q, r \in \mathcal{S}$ (por qué?).

Verifiquemos si $p \in \mathcal{S}$. Evaluando $p(1) = m+2 = 0$ entonces $m = -2$ y $p'(1) = 2(1)+m = 2-2 = 0$. Entonces $m = -2$ (si m toma otro valor, no hay manera de que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$). Reemplazando $m = -2$, tenemos que $p(x) = x^2 - 2x + 1,\ q(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3,\ r(x) = -x^3 + x^2 + x - 1$. Falta verificar que $q, r \in \mathcal{S}$ (si eso no ocurre entonces no existe tal m y nunca podría pasar que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$). Verificando, se ve que $q(1) = 0$, $q'(1) = 3.1 + 2.1 - 5 = 0$ y $r(1) = 0$, $r'(1) = -3.1 + 2.1 + 1 = 0$. Entonces, si $m = -2$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$. Falta verificar que para ese valor de m, vale que $\dim(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{T})$. En ese caso, observar $\dim(\mathcal{S}) = 2$, pues $\mathcal{S} = gen\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1\}$. Además, como $\frac{q+r}{2} = p$, vale que $\mathcal{T} = gen\{p, q, r\} = gen\{q, r\}$. Como q y r no son multiplos entonces son LI y $\dim(\mathcal{T}) = 2 = \dim(\mathcal{S})$. Entonces, si $m = -2$ tenemos que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $\square$

Anexo

La siguiente observación intenta justificar por qué cuando se tiene una cantidad (finita) de vectores de $\mathbb{C}^n$ para verificar su independencia lineal basta con colocarlos en fila en una matriz, triangular y ver si una (o más) fila/s se anulan.

Observación 1 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subseteq \mathbb{V}$ un conjunto de vectores. Entonces:

i) $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots v_r\}$ es LI y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots v_r\}$ es LI. Es decir la independencia lineal de un conjunto no cambia si cambiamos el orden de los elementos del conjunto.

ii) $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_r\}$ es LI y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, cv_i, \cdots v_r\}$ es LI, para todo $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Es decir la independencia lineal de un conjunto no cambia si multiplicamos por un escalar no nulo alguno de los vectores.

iii) $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots v_r\}$ es LI y sólo si $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j + \lambda vi, \cdots v_r\}$ es LI para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ (acá λ puede ser 0). Es decir la independencia lineal de un conjunto no cambia si a un vector lo reemplazamos por ese mismo vector sumado un multiplo de otro vector.

Vamos a probar el item *iii*). Se recomienda probar los otros items que son más simples.

Supongamos que el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots v_r\}$ es LI.

Queremos ver que $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j + \lambda vi, \cdots v_r\}$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ es LI. Lo haremos por definición. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_r \in \mathbb{K}$ tales que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_iv_i + \cdots a_j(v_j + \lambda vi) + \cdots + a_rv_r = 0_{\mathbb{V}}.$$

Operando y sacando factor común $v_1, v_2, \cdots, v_r$, tenemos que:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + (a_i + a_j\lambda)v_i + \cdots + a_jv_j + \cdots + a_rv_r = 0_{\mathbb{V}}.$$

Nos quedó una CL de los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_r$ igualada a $0_{\mathbb{V}}$. Entonces, usando la hipótesis (es decir que $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots v_r\}$ es LI), tenemos que, $a_1 = a_2 = \cdots = (a_i + a_j\lambda) = \cdots = a_j = \cdots = a_r = 0$. Entonces, $a_i = -\lambda a_j = -\lambda 0 = 0$. Entonces, como concluimos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_i = \cdots = a_j = \cdots = a_r = 0$ tenemos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j + \lambda vi, \cdots v_r\}$ es LI y probamos lo que queríamos (observar que λ era cualquier elemento del cuerpo $\mathbb{K}$, por lo tanto, lo que probamos vale para todo $\lambda \in \mathbb{K}$).

Recíprocamente, supongamos que $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j + \lambda vi, \cdots v_r\}$ es LI para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Queremos ver que el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots v_r\}$ es LI. Observar que como la hipótesis vale para para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, basta tomar $\lambda = 0$ y tenemos lo que queríamos probar.